OTTO VON GUERICKE UNIVERSITÄT MAGDEBURG

INF FAKULTÄT FÜR INFORMATIK

Minimierung Boolescher Funktionen

Xenija Neufeld
Tony Gieseler
Eric Prellwitz
Marcel Amthor

Boolesche Funktionen

- Woher bekommt man eine boolesche Funktion ?

X1	X2	X3	Y	Minterme	Maxterme
0	0	0	0		X1+X2+X3
0	0	1	0		X1+X2+X3‘
0	1	0	0		X1+X2‘+X3
0	1	1	1	X1‘ X2 X3	
1	0	0	0		X1‘+X2+X3
1	0	1	1	X1 X2‘ X3	
1	1	0	0		X1‘+X2‘+X3
1	1	1	1	X1 X2 X3	

DNF: Y = X1‘ X2 X3 + X1 X2‘ X3 + X1 X2 X3
Summe aus Produkten

KNF: Y= (X1+X2+X3) * (X1+X2+X3‘) * (X1+X2‘+X3) * (X1‘+X2+X3) * (X1‘+X2‘+X3)
Produkt aus Summen

Minimierung durch semantisch äquivalentes Umformen

- Es kann jede Normalform der Funktion kann verwendet werden
- Sinnvoll ist es die Normalform zu nehmen, die weniger Terme enthält
- Wichtige Axiome:
  - $A + (A \bullet B) = A$, $A \bullet (A + B) = A$ Absorptionsges.
  - Assoziativgesetz, Kommutativgesetz und Distributivgesetz
  - $(A + B)' = A' \cdot B'$, $(A \cdot B)' = A' + B'$ De Morgansche Regeln
  - $A \cdot B' + A \cdot B = A$ Resolutionsregel
  - Resolventenmethode mit Verwendung von
    - Resolutionsgesetz
    - Absorptionsgesetz

Karnaugh - Veitch Diagramm

$f = x1'x2'x3'x4' + x1'x2'x3x4' + x1'x2x3x4 + x1x2x3x4 + x1x2'x3'x4' + x1x2'x3x4' + x1x2x3x4'$

	x1 x2 00	01	11	10
x3 x4 00	1	0	0	1
01	0	0	0	0
11	0	1	1	0
10	1	0	1	1

- Felder der Größe 2^n makieren

Karnaugh - Veitch Diagramm

F = x1‘x2‘x3‘x4‘ + x1‘x2‘x3x4‘ + x1‘x2x3x4 + x1x2x3x4 + x1x2‘x3‘x4‘ + x1x2‘x3x4‘ +

x1x2x3x4‘

	x1 x2 00	01	11	10
x3 x4 00	1	0	0	1
01	0	0	0	0
11	0	1	1	0
10	1	0	1	1

- F = X2 X3 X4 + X1 X2 X3 + X2‘ X4‘

Karnaugh - Veitch Diagramm

F = x1‘x2‘x3‘x4‘ + x1‘x2‘x3x4‘ + x1‘x2x3x4 + x1x2x3x4 + x1x2‘x3‘x4‘ + x1x2‘x3x4‘ +

x1x2x3x4‘

	x1 x2 00	01	11	10
x3 x4 00	1	0	0	1
01	0	0	0	0
11	0	1	1	0
10	1	d	1	1

- F = X2X3+ X2‘ X4‘
- Falls mehr als 4 Eingänge – mehrere Diagramme

Quine McCluskey

- Sehr effiziente Methode zum Minimieren
- Auch algorithmisch umsetzbar
- Voraussetzung ist die KDNF
- Y = x1‘x2‘x3‘x4‘ + x1‘x2‘x3x4‘ + x1‘x2x3x4 + x1x2x3x4 + x1x2‘x3‘x4‘ + x1x2‘x3x4‘ + x1x2x3x4‘
- 1.Schritt: Einteilung nach Anzahl positiver Literale
- 2. Schritt: Vergleiche alle benachbarten Klassen A_i und A_{i+1}, ob es Elemente a aus A_i und b aus A_{i+1} gibt, die sich nur in einem Literalunterscheiden, dann:
  - Füge a \ (a \ b) in eine Ergebnisliste ein
- 3.Schritt:Wende das Verfahren rekursiv auf die Ergebnisliste an, bis keine weiteren Zusammenfassungen möglich sind

Quine McCluskey

- 4. Schritt: Ergebnis sind alle nicht markierten Terme vereinigt mit dem Ergebnis des rekursiven Aufrufs. Zu jedem Ergebnisterm (Primterm) wird notiert aus welchen Mintermen er entstanden ist
- 5. Schritt: Tabelle erstellen in der Primterme Zeilenbeschriftung sind und alle Minterme die Spaltenbeschriftung
- Weitere Schritte wurden hier komprimiert und etwas verständlicher beschrieben
- 6.Schritt: Elimination: alle Minterme müssen abgedeckt sein, also können von Primtermen, die gleiche Minterme abdecken ein oder mehrere gestrichen werden
- Zum Schluss muss eine minimale Anzahl von Primtermen über sein, die alle Minterme abdecken
- Die übrigen Primterme bilden dann die minimierte Funktion

Zusatzaufgabe Quine McCluskey

- Im folgenden soll mit dem Verfahren von Quine-McCluskey ein Minimalpolynom für y abgeleitet werden, das in Abhängigkeit von x3, x2, x1 und x0 anhand folgender Tabelle definiert ist:
- 1. Bestimmen Sie die Primimplikanten mit dem Quine-McCluskey-Verfahren:
- 2. Erstellen Sie eine Primimplikantentafel nach dem Quine-McCluskey-Verfahren:
- 3. Geben Sie das Minimalpolynom an:

X0	X1	X2	X3	Y
0	0	0	0	0
1	0	0	0	0
0	1	0	0	1
1	1	0	0	1
0	0	1	0	0
1	0	1	0	0
0	1	1	0	0
1	1	1	0	0
0	0	0	1	1
1	0	0	1	0
0	1	0	1	1
1	1	0	1	1
0	0	1	1	1
1	0	1	1	1
0	1	1	1	1
1	1	1	1	1

Lösung

- Die abgeleitete KNDF ist:
  - Y=X0‘X1 X2‘X3‘ + X0‘X1‘X2‘X3 + X0 X1 X2‘X3‘ + X0‘X1 X2‘X3 + X0‘X1‘X2 X3 +

  X0 X1 X2‘X3 + X0 X1‘X2 X3 + X0‘X1 X2 X3 + X0 X1 X2 X3

- Eingeteilt nach positiver Literale ergibt sich folgende Tabelle

A	X0‘X1 X2‘X3‘
B	X0‘X1‘X2‘X3
C	X0 X1 X2‘X3‘
D	X0‘X1 X2‘X3
E	X0‘X1‘X2 X3
F	X0 X1 X2‘X3
G	X0 X1‘X2 X3
H	X0‘X1 X2 X3
I	X0 X1 X2 X3

Lösung

- Nun die Erzeugung der Primterme

A+C	X1 X2‘ X3‘	X0‘ X3	
A+D	X0‘ X1 X2‘	X1 X2‘	
B+D	X0‘ X2‘ X3	X1 X3	
B+E	X0‘ X1‘ X3	X2 X3	
C+F	X0 X1 X2‘		
D+F	X1 X2‘ X3		
D+H	X0‘ X1 X3		
E+G	X1‘X2 X3		
E+H	X0‘ X2 X3		
F+I	X0 X1 X3		
G+I	X0 X2 X3		
H+I	X1 X2 X3		

Lösung

- Primtermtabelle aufstellen und überflüssige Zeilen Streichen

	A	B	C	D	E	F	G	H	I
X0‘X3		x		x	x			x	
X1X2‘	x		x	x		x			
X1X3				x		x		x	x
X2X3					x		x	x	x

- Die blauen Markierungen zeigen Minterme, die nur von einem Primterm abgedeckt werden, wodurch diese Primterme nicht gestrichen werden dürfen
- Übrig zum Streichen bleibt somit nur Zeile 3 (rot markiert), sodass noch alle Minterme enthalten sind
- F = X0‘ + X1 X2‘ + X2 X3