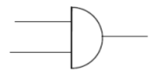
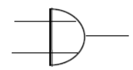
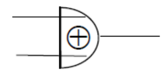
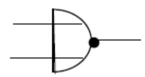
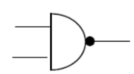
Grundlagen technischer Informatik

Vortrag von:
Tino Reising
Fabian Göcke
Sascha Kühne
Maximilian Kühn

Schaltfunktionen

<u>Zweistelligen Funktionen:</u>

- Konjunktion,UND-Funktion →  $f(x,y) = x \cdot y$
- Disjunktion, ODER-Funktion →  $f(x,y) = x + y$
- exklusives ODER, Antivalenz, XOR →  $f(x,y) = \bar{x} \cdot y + x \cdot \bar{y}$
- negiertes ODER, NOR →  $f(x,y) = \overline{x+y}$
- Äquivalenz → $f(x,y) = x \cdot y + \bar{x} \cdot \bar{y}$ $\quad f(x,y) = x \equiv y$
- Implikation → $f(x,y) = \bar{x} + y$ $\quad f(x,y) = x \Rightarrow y$
- **negiertes UND, NAND** →  $f(x,y) = \overline{x \cdot y}$

→Jede Schaltfunktion kann man ausschließlich durch **NAND-Gattern** ausdrücken.

Systematische Darstellung von Schaltungen

Produktterm:

einfache Variable (ggf. negiert)

Konjunktion mehrerer Variablen (ggf. negiert)

Beispiele: x, $\overline{y}$, $x \cdot y$, $x \cdot \overline{y} \cdot z$

Summenterm:

wie Produktterm, jedoch Disjunktion statt Konjunktion

Beispiele: $\overline{x}$, y, $x+\overline{y}$, $x+y+\overline{z}$

Minterm:

Produktterm, in dem jede Variable einer booleschen Funktion genau einmal vorkommt (einfach oder negiert)

Beispiel: $x \cdot \overline{y} \cdot z$ ist ein Minterm der Funktion $f(x,y,z)$

Maxterm:

Summenterm, in dem jede Variable einer booleschen Funktion genau einmal vorkommt (einfach oder negiert)

Beispiel: $x+y+\overline{z}$ ist ein Maxterm der Funktion $f(x,y,z)$

Systematische Darstellung von Schaltungen

Min- und Maxterme

Eingaben		Ausgabe	Minterme
X	Y	A	
0	0	1	$\overline{X}\,\overline{Y}$
0	1	0	$\overline{X}\,Y$
1	0	1	$X\overline{Y}$
1	1	1	XY

B.-Gleichung $\overline{X}\overline{Y} + X\overline{Y} + XY = A$

Eingaben		Ausgabe	Maxterme
X	Y	A	
1	1	0	$X+Y$
1	0	1	$X+\overline{Y}$
0	1	0	$\overline{X}+Y$
0	0	0	$\overline{X}+\overline{Y}$

Abgeleitete Gleichung: $A = X + \overline{Y}$

Ergebnis: **Summe von Produkten**

Ergebnis: **Produkt von Summen**

$$\overline{X}\,\overline{Y} + X\overline{Y} + XY = A$$
$$\overline{X}\overline{Y} + X\,(\overline{Y} + Y) = A$$
$$\overline{X}\overline{Y} + X = A$$
$$X + \overline{Y} = A$$

Die Darstellung einer Schaltfunktion durch MinTerme und MaxTerme sind semantisch äquivalent(aber in der Regel syntaktisch verschieden)

Normalformen

Disjunktive Normalform (DNF, Summe von Produkten):

Disjunktion von Produkttermen

Beispiel: $(x \cdot \overline{y}) + (x \cdot \overline{y} \cdot z)$

Konjunktive Normalform (KNF, Produkt von Summen):

Konjunktion von Summentermen

Beispiel: $w \cdot (\overline{x} + y) \cdot (x + \overline{y} + z)$

Kanonische Disjunktive Normalform (KDNF):

Disjunktion von Mintermen

Beispiel: $(\overline{x} \cdot \overline{y} \cdot \overline{z}) + (x \cdot \overline{y} \cdot z) + (x \cdot y \cdot \overline{z})$ ist KDNF von $f(x,y,z)$

Kanonische Konjunktive Normalform (KKNF):

Konjunktion von Maxtermen

Beispiel: $(\overline{x} + \overline{y}) \cdot (\overline{x} + y) \cdot (x + \overline{y})$ ist KKNF von $f(x,y)$

Normalformen

Satz: Jede KDNF kann in eine KKNF umgewandelt, jede KKNF kann in eine KDNF umgewandelt werden

Folgerung: Zwei Darstellungen Boolescher Funktionen sind äquivalent, wenn sie durch Umformungen gemäß den Sätzen der Booleschen Algebra auf die gleiche KDNF bzw. KKNF zurückgeführt werden können

→ Jede beliebige Schaltfunktion läßt sich automatisch realisieren

Resolventenmethode

Resolutionsgesetz (RG): $AB + (\neg A)C = AB + (\neg A)C + BC$

Absorptionsgesetz (AG): $AB + B = B$

Voraussetzung:

Formel in DNF (nicht unbedingt kanonische Normalform)

Grundidee:

- mit RG neue (einfachere) Terme zu erzeugen
- mit AG alte (komplexere) Terme zu streichen

Resolventenmethode

Schritt 0: Schreibe Formel in Zeile 0 einer Tabelle

Schritt 1: Prüfe in Zeile i paarweise mit der Zeile (und allen vorherigen Zeilen), ob RG anwendbar ist, falls ja füge BC in Zeile i+1 ein.

Schritt 2: Prüfe in Zeile i+1 paarweise mit der Zeile (und allen vorherigen Zeilen), ob AG anwendbar ist, falls ja streiche AB.

Wiederhole das Verfahren solange bis in Schritt 2 und 3 keine Änderungen mehr auftreten!